DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Resistencia de materiales

Hiperestática

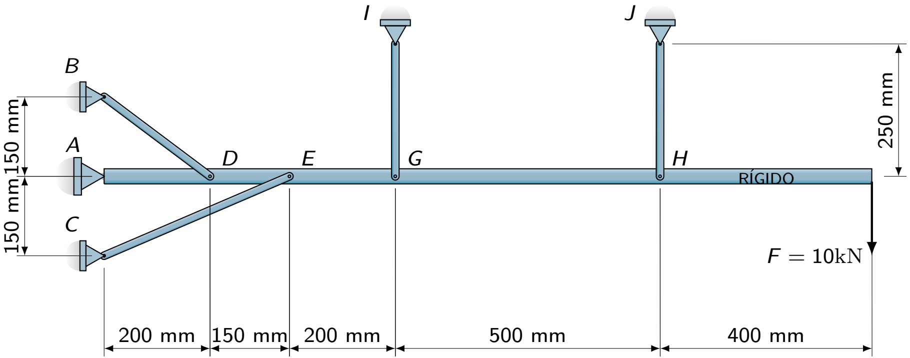
Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
18 de noviembre de 2020

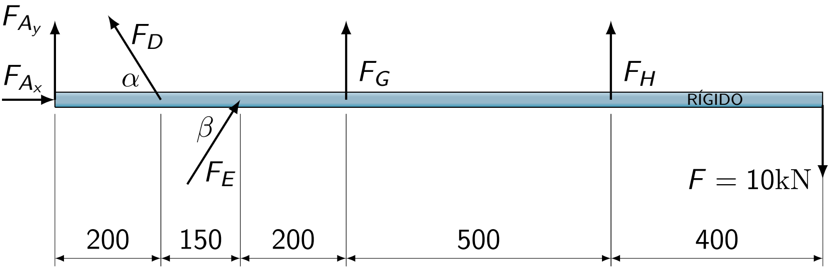
Ejercicio hiperestático:

Se tiene la estructura de la figura donde la viga **AH** es rígida, a la cual se articulan la barra **BD**, **CE**, **IG**, **JH**. Las barras son de acero (E=210 [GPa]) y todas tienen la misma área transversal de 300 [mm^2]. Calcule los esfuerzos en todas las barras si la fuerza es de 10 [KN]. Utilice el teorema de Castigliano.



Ejercicio hiperestático:

Primero se resuelve la estática en la viga:



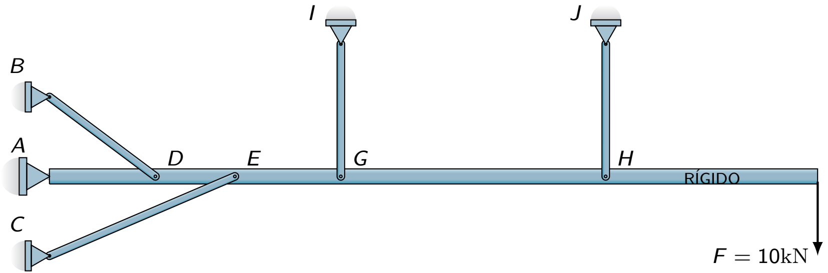
$$\sum M_a = 0 :$$

$$200 F_D \sin(\alpha) + 350 F_E \sin(\beta) + 550 F_G + 1050 F_H = 1450 F \qquad (1)$$

Ejercicio hiperestático:

Considerando como elementos deformables las barras **BD**, **CE**, **IG** y **JH**, se obtiene la derivada de la función de energía de deformación del sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i = \delta_{BD}\frac{\partial F_D}{\partial F_i} + \delta_{CE}\frac{\partial F_E}{\partial F_i} + \delta_{IG}\frac{\partial F_G}{\partial F_i} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_i} \tag{2}$$



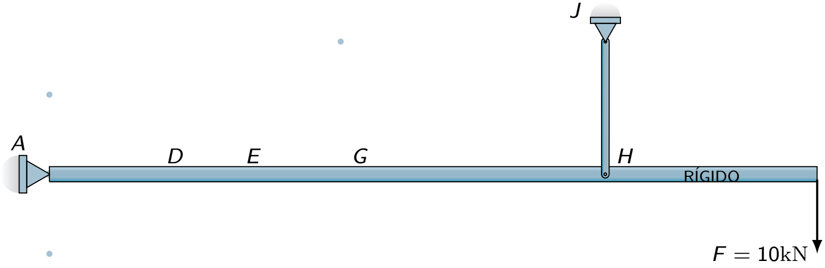
Dado que sólo existe una ecuación de la estática, y es necesaria solamente una barra para convertir este problema en un caso isoestático, se eligen 3 barras redundantes y sólo una perteneciente al sistema isoestático, tal como se observa en la siguiente tabla.

$\overline{BD}$ (F_D)	$\overline{CE}$ (F_E)	$\overline{IG}$ (F_G)	$\overline{JH}$ (F_H)
Redundante	Redundante	Redundante	Isoestático
Independiente	Independiente	Independiente	Dependiente

Ejercicio hiperestático:

Considerando como elementos deformables las barras **BD**, **CE**, **IG** y **JH**, se obtiene la derivada de la función de energía de deformación del sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i = \delta_{BD}\frac{\partial F_D}{\partial F_i} + \delta_{CE}\frac{\partial F_E}{\partial F_i} + \delta_{IG}\frac{\partial F_G}{\partial F_i} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_i} \quad (2)$$



Dado que sólo existe una ecuación de la estática, y es necesaria solamente una barra para convertir este problema en un caso isoestático, se eligen 3 barras redundantes y sólo una perteneciente al sistema isoestático, tal como se observa en la siguiente tabla.

$\overline{BD}$ (F_D)	$\overline{CE}$ (F_E)	$\overline{IG}$ (F_G)	$\overline{JH}$ (F_H)
Redundante	Redundante	Redundante	Isoestático
Independiente	Independiente	Independiente	Dependiente

Ejercicio hiperestático:

Por lo anterior se establece que las barras **redundantes** son variables **independientes** y las que pertenecen al sistema **isoestático** son variables **dependientes** en la formulación.

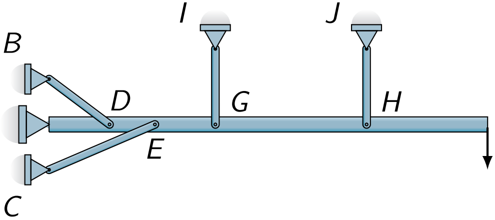
Luego, reordenando la ecuación 1, se crea una función para la fuerza dependiente F_H:

$$F_H = \frac{1450F - 200F_D\sin(\alpha) - 350F_E\sin(\beta) - 550F_G}{1050} \tag{3}$$

Con la ecuación anterior se calculan todas las **derivadas parciales** de las variables **dependientes** (isoestáticas, F_H), **respecto de las independientes** (redundantes, F_D, F_E, F_G).

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_H}{\partial F_D} &= \frac{-200\sin(\alpha)}{1050} \\ \frac{\partial F_H}{\partial F_E} &= \frac{-350\sin(\beta)}{1050} \\ \frac{\partial F_H}{\partial F_G} &= \frac{-550}{1050} \end{aligned} \tag{4}$$

Ejercicio hiperestático:



Se consideran los pasadores **B**, **C** e **I** como puntos con desplazamientos conocidos ($\delta = 0$) para derivar la energía de deformación respecto a las fuerzas F_D, F_E y F_G (independientes o redundantes). Aplicando el teorema de Castigliano para el pasador **B** (F_D):

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i = \delta_{BD}\frac{\partial F_D}{\partial F_i} + \delta_{CE}\frac{\partial F_E}{\partial F_i} + \delta_{IG}\frac{\partial F_G}{\partial F_i} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_i}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{BD}\cancelto{1}{\frac{\partial F_D}{\partial F_D}} + \delta_{CE}\cancelto{0}{\frac{\partial F_E}{\partial F_D}} + \delta_{GI}\cancelto{0}{\frac{\partial F_G}{\partial F_D}} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_D} \\
0 &= \frac{F_D l_D}{\cancel{EA}} + \frac{F_H l_H}{\cancel{EA}}\left(\frac{-200}{1050}\sin(\alpha)\right) \\
0 &= F_D l_D + F_H l_H\left(\frac{-200}{1050}\sin(\alpha)\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Ejercicio hiperestático:

Realizando el teorema de Castigliano para cada fuerza independiente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
F_H &= \frac{1450F - 200F_D\sin(\alpha) - 350F_E\sin(\beta) - 550F_G}{1050} \\
0 &= F_D l_D + F_H l_H \left(\frac{-200}{1050}\sin(\alpha)\right) \\
0 &= F_E l_E + F_H l_H \left(\frac{-350}{1050}\sin(\beta)\right) \\
0 &= F_G l_G + F_H l_H \left(\frac{-550}{1050}\right)
\end{cases}
\tag{6}
$$

Considerando a:

$F = 10$ [KN], $l_H = l_G = 250$ [mm], $l_D = \sqrt{150^2 + 200^2}$ [mm],

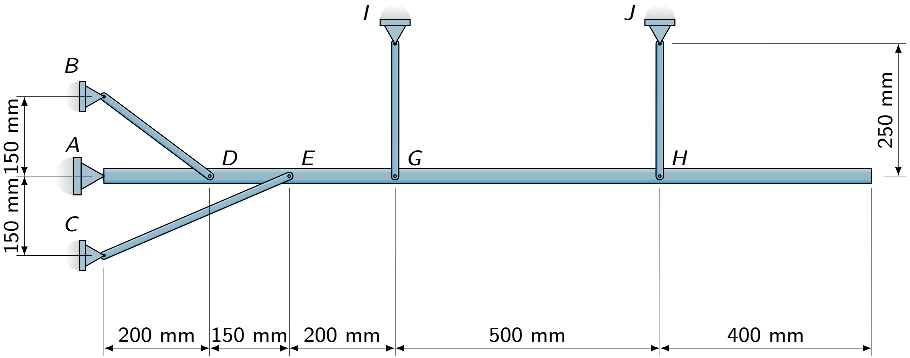
$l_E = \sqrt{150^2 + 350^2}$ [mm], $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{150}{200}\right)$, $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{150}{350}\right)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineal, se obtiene la fuerza y esfuerzo en cada barra:

	Barra			
	B-D (F_D)	C-E (F_E)	I-G (F_G)	J-H (F_H)
F [N]	1215.19	916.627	5569.6	10632.9
σ [MPa]	4.050	3.055	18.565	35.443

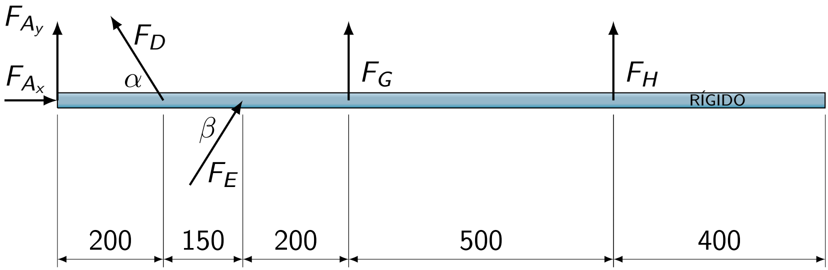
Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Se tiene la estructura de la figura donde la viga **AH** es rígida, a la cual se articulan la barra **BD**, **CE**, **IG**, **JH**. Las barras son de acero (E=210 [GPa], α_T=12*10^{-6} [1/°C]) y todas tienen la misma área transversal de 300 [mm^2]. Calcule los esfuerzos en todas las barras si la temperatura aumenta en $\Delta T = 20$ [°C]. Utilice el teorema de Castigliano.



Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Primero se resuelve la estática en la viga:



$$\sum M_a = 0 :$$

$$200F_D\sin(\alpha) + 350F_E\sin(\beta) + 550F_G + 1050F_H = 0 \qquad (7)$$

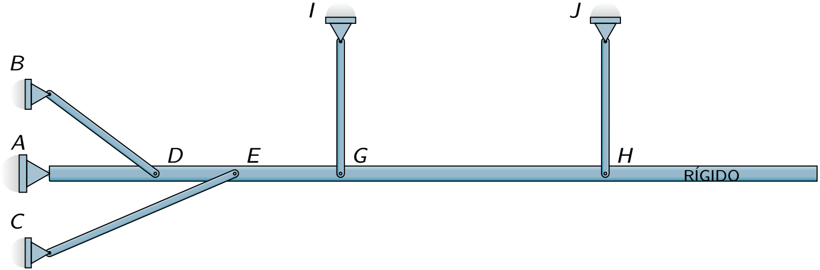
NOTA

Hay que resaltar que de acuerdo a la definición de las fuerzas, las barras $\overline{BD}$, $\overline{GI}$, $\overline{HJ}$ se están asumiendo a tracción (Concordante a la deformación térmica) y la barra $\overline{CE}$ se asume a compresión (Contraria a la deformación térmica).

Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Considerando como elementos deformables las barras **BD**, **CE**, **IG** y **JH**, se obtiene la derivada de la función de energía de deformación del sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i = \delta_{BD}\frac{\partial F_D}{\partial F_i} + \delta_{CE}\frac{\partial F_E}{\partial F_i} + \delta_{IG}\frac{\partial F_G}{\partial F_i} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_i} \tag{8}$$



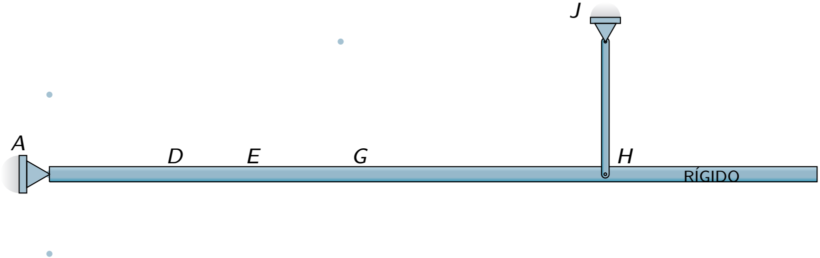
Dado que sólo existe una ecuación de la estática, y es necesaria solamente una barra para convertir este problema en un caso isoestático, se eligen 3 barras redundantes y sólo una perteneciente al sistema isoestático, tal como se observa en la siguiente tabla.

$\overline{BD}$ (F_D)	$\overline{CE}$ (F_E)	$\overline{IG}$ (F_G)	$\overline{JH}$ (F_H)
Redundante	Redundante	Redundante	Isoestático
Independiente	Independiente	Independiente	Dependiente

Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Considerando como elementos deformables las barras **BD**, **CE**, **IG** y **JH**, se obtiene la derivada de la función de energía de deformación del sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i = \delta_{BD}\frac{\partial F_D}{\partial F_i} + \delta_{CE}\frac{\partial F_E}{\partial F_i} + \delta_{IG}\frac{\partial F_G}{\partial F_i} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_i} \tag{8}$$



Dado que sólo existe una ecuación de la estática, y es necesaria solamente una barra para convertir este problema en un caso isoestático, se eligen 3 barras redundantes y sólo una perteneciente al sistema isoestático, tal como se observa en la siguiente tabla.

$\overline{BD}$ (F_D)	$\overline{CE}$ (F_E)	$\overline{IG}$ (F_G)	$\overline{JH}$ (F_H)
Redundante Independiente	Redundante Independiente	Redundante Independiente	Isoestático Dependiente

Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Por lo anterior se establece que las barras **redundantes** son variables **independientes** y las que pertenecen al sistema **isoestático** son variables **dependientes** en la formulación.

Luego, reordenando la ecuación 1, se crea una función para la fuerza dependiente F_H:

$$F_H = \frac{-200F_D \sin(\alpha) - 350F_E \sin(\beta) - 550F_G}{1050} \tag{9}$$

Con la ecuación anterior se calculan todas las **derivadas parciales** de las variables **dependientes** (isoestáticas, F_H), **respecto de las independientes** (redundantes, F_D, F_E, F_G).

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_H}{\partial F_D} &= \frac{-200\sin(\alpha)}{1050} \\ \frac{\partial F_H}{\partial F_E} &= \frac{-350\sin(\beta)}{1050} \\ \frac{\partial F_H}{\partial F_G} &= \frac{-550}{1050} \end{aligned} \tag{10}$$

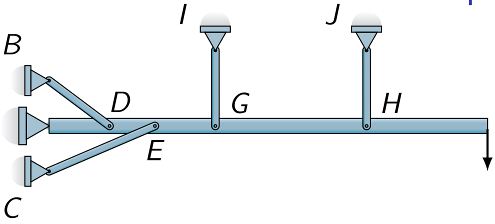
Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Recordando la definición de tracción ($\overline{BD}$, $\overline{GI}$, $\overline{HJ}$), compresión ($\overline{CE}$) y el cambio de temperatura de cada barra se obtiene el alargamiento de cada una.

$$
\begin{aligned}
\delta_{BD} &= \delta_{BD}^{M} + \delta_{BD}^{T} = \frac{F_D l_D}{EA} + \alpha_T l_D \Delta T \\
\delta_{CE} &= \delta_{CE}^{M} - \delta_{CE}^{T} = \frac{F_E l_E}{EA} - \alpha_T l_E \Delta T \\
\delta_{IG} &= \delta_{IG}^{M} + \delta_{IG}^{T} = \frac{F_G l_G}{EA} + \alpha_T l_G \Delta T \\
\delta_{HJ} &= \delta_{HJ}^{M} + \delta_{HJ}^{T} = \frac{F_H l_H}{EA} + \alpha_T l_H \Delta T
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Donde el superíndice M y T indican el alargamiento debido al efecto mecánico y térmico respectivamente.
El signo $+$ indica que el efecto mecánico y térmico producen alargamientos en la misma dirección (tracción y expansión).
El signo - indica que el efecto mecánico y térmico producen alargamientos en distintas direcciones (compresión y expansión).

Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:



Se consideran los pasadores **B**, **C** e **I** como puntos con desplazamientos conocidos ($\delta = 0$) para derivar la energía de deformación respecto a las fuerzas F_D, F_E y F_G (independientes o redundantes). Aplicando el teorema de Castigliano para el pasador **B** (F_D):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial F_i} &= \delta_i = \delta_{BD}\frac{\partial F_D}{\partial F_i} + \delta_{CE}\frac{\partial F_E}{\partial F_i} + \delta_{IG}\frac{\partial F_G}{\partial F_i} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_i} \\
0 &= \delta_{BD}\cancelto{1}{\frac{\partial F_D}{\partial F_D}} + \delta_{CE}\cancelto{0}{\frac{\partial F_E}{\partial F_D}} + \delta_{GI}\cancelto{0}{\frac{\partial F_G}{\partial F_D}} + \delta_{HJ}\frac{\partial F_H}{\partial F_D} \\
0 &= \left(\frac{F_D l_D}{EA} + \alpha_T \Delta T\right) + \left(\frac{F_H l_H}{EA} + \alpha_T \Delta T\right)\frac{\partial F_H}{\partial F_D} \\
0 &= l_D\left(\frac{F_D}{EA} + \alpha_T \Delta T\right) + l_H\left(\frac{F_H}{EA} + \alpha_T \Delta T\right)\left(-\frac{200}{1050}\sin(\alpha)\right)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ejercicio hiperestático con variación de temperatura:

Realizando la derivada de la ecuación 12 para cada fuerza independiente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F_H &= \frac{-200 F_D \sin(\alpha) - 350 F_E \sin(\beta) - 550 F_G}{1050} \\ 0 &= l_D \left(\frac{F_D}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) + l_H \left(\frac{F_H}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) \left(\frac{-200}{1050} \sin(\alpha) \right) \\ 0 &= l_E \left(\frac{F_E}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) + l_H \left(\frac{F_H}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) \left(\frac{-350}{1050} \sin(\beta) \right) \\ 0 &= l_G \left(\frac{F_G}{EA} - \alpha_T \Delta T \right) + l_H \left(\frac{F_H}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) \left(\frac{-550}{1050} \right) \end{cases} \tag{13}$$

Considerando a:

$l_H = l_G = 250$ [mm], $l_D = \sqrt{150^2 + 200^2}$ [mm], $l_E = \sqrt{150^2 + 350^2}$ [mm], $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{150}{200}\right)$,

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{150}{350}\right)$, $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}$ [1/°C], $\Delta T = 20$ [°C], $E = 210000$ [MPa], $A = 300$ [mm^2]

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineal, se obtiene la fuerza y esfuerzo en cada barra:

	Barra			
	B-D (F_D)	C-E (F_E)	I-G (F_G)	J-H (F_H)
F [N]	-13115.21	16632.23	-5931.39	2421.88
σ [MPa]	-43.72	55.44	-19.77	8.07

Resistencia de materiales

Hiperestática

Matías Pacheco Alarcón & Estefano Muñoz Moya

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: matias.pacheco@usach.cl & estefano.munoz@usach.cl

Ingeniería Mecánica
18 de noviembre de 2020